Prof. Rainer Nagel

WS 2011/12
15. Dezember 2011

Übungen zur Vorlesung

Ergodentheorie

Blatt 10

The essence of mathematics is not to make simple things complicated, but to make complicated things simple.
S. Gudder

1. Die Stone-Čech Kompaktifizierung eines vollständig regulären topologischen Raumes X ist der eindeutig bestimmte kompakte Raum βX, sodass X ein dichter Teilraum von βX ist und jede beschränkte, stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, stetig auf βX fortgesetzt werden kann. Nach Satz von Gelfand-Naimark ist der Raum $l^\infty(\mathbb{N})$ isometrisch isomorph zum Raum $C(K)$, K der Gelfand-Raum. Zeige, dass K isomorph zu $\beta\mathbb{N}$ ist.

2. Die C*-Algebra $C([0,1])$ ist isomorph zu $C(K)$, K der Gelfand-Raum. Welche Beziehung besteht zwischen $[0,1]$ und K.

3. Zeige, dass eine kommutative C*-Algebra A ohne Einheitselement isometrisch isomorph ist zu einem Raum $C_0(K)$ (dem Raum der stetigen komplexwertigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden), K ein lokal kompakter Hausdorff-Raum. Hinweis: Wenn man A in eine C*-Algebra mit Einheitselement A_1 einbettet, kann man Gelfand-Naimark darauf anwenden. Definiere A_1 als $\{(a,\lambda) : a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$ mit der üblichen linearen Struktur. Multiplikation ist definiert als $(a,\lambda)\cdot(b,\mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$. Dann wird A mit $\{(a,0) : a \in A\}$ identifiziert und $(0,1)$ ist das Einheitselement von A_1. Die Norm eines Elementes aus A_1 ist definiert als $\|(a,\lambda)\|_{A_1} = \sup_{\|x\|\leq 1} ax + \lambda x$. Dann ist A_1 eine C*-Algebra (muss nicht bewiesen werden). Man hat, dass A ein maximales Ideal von A_1 ist. Es gibt also einen Algebra-Homomorphismus $\phi : A_1 \to \mathbb{C}$ mit Kern A.